Лекция 3
РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$, такова, что $a_n \neq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdots$ *сходится*, если сходится последовательность частичных произведений $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, $p \neq 0$, $p \neq \infty$. Обозначим $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = p$.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Если $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно (см., например, [3]).

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$. Тем самым бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *сходится абсолютно* тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Из абсолютной сходимости бесконечного произведения следует сходимость бесконечного произведения.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_n(z)\}$, $z \in D \subset \mathbb{C}$, где D — область комплексной плоскости, $u_n(z) \neq -1$, $z \in D$. Под *функциональным бесконечным произведением* будем понимать бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$, $z \in D$. Из сказанного следует, что если

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$ сходится при $z \in D$, то функциональное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ сходится на D.

Бесконечное произведение называется *равномерно сходящимся в области* D, если последовательность частичных произведений $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z))$ равномерно сходится в области D. Бесконечное произведение назовем *равномерно сходящимся внутри области* D, если последовательность частичных произведений $p_n(z)$ сходится равномерно внутри области D (равномерно на любом компакте $K \subset D$).

Напомним **признак Вейерштрасса равномерной сходимости**: если в области D

$$|u_n(z)| \le a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall z \in D$$

и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональное бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ сходится равномерно в D.

Утверждение (достаточный признак равномерной сходимости внутри области D). Пусть D — односвязная область, $u_n(z) \in A(D)$, $u_n(z) \ne -1$, $z \in D$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n(z))$ (при определенном выборе ветвей логарифма) сходится равномерно внутри области D, то функциональное бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ также сходится равномерно внутри области D и является аналитической функцией.

Доказательство. По условию $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k(z)) \in A(D)$, тогда

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z)) = \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k(z))\right] \in A(D).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n(z))$ сходится внутри области равномерно, то по теореме Вейерштрасса (см. [3]) представляет аналитическую функцию в области D, а тогда и

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z)) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) \in A(D). \blacksquare$$

Будем считать, что D — односвязная область, $u_n(z) \in A(D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и удовлетворяет условию

$$\forall K \subset D \quad (K \text{— компакт}) \quad \exists N(K): \quad u_n(z) \neq -1, \quad \forall n \geq N(K).$$

Скажем, что функциональное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ *сходится в области* D, если сходится произведение $\prod_{n=N(K)}^{\infty}(1+u_n(z))$, $\forall K \subset D$. При таком определении функция $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ может обращаться в нуль в некоторых точках области D.

Покажем теперь, что для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$ существует целая функция с нулями в этих точках и только в них.

Положим

$$E(u,0) = 1-u, \quad E(u,n) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n}\right).$$

Лемма 3.1. Верны неравенства

$$\left|\ln\left|E(u,n)\right|\right| \leq \left|\ln E(u,n)\right| \leq 2|u|^{n+1}, \quad |u| \leq \frac{1}{2};$$

$$\left|\ln\left|e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^n}{n}}\right|\right| \leq (2|u|)^n, \quad |u| \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Так как при $|u| < \dfrac{1}{2}$

$$\ln E(u,n) = \ln(1-u) + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n} = -\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2} - \ldots,$$

то

$$\left|\ln E(u,n)\right| \leq |u|^{n+1} + |u|^{n+2} + \ldots \leq 2|u|^{n+1}.$$

Пусть теперь $|u| \geq \dfrac{1}{2}$, тогда

$$e^{-|u|-\frac{|u|^2}{2}-\ldots-\frac{|u|^n}{n}} \leq \left|e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^n}{n}}\right| \leq e^{|u|+\frac{|u|^2}{2}+\ldots+\frac{|u|^n}{n}}.$$

А так как $|u|+\frac{|u|^2}{2}+\ldots+\frac{|u|^n}{n}\le |u|^n(1+|u|+\ldots+|u|^{1-n})\le 2^n|u|^n$, то

$$e^{-(2|u|)^n}\le\left|e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^n}{n}}\right|\le e^{(2|u|)^n}.$$

Окончательно

$$\left|\ln\left|e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^n}{n}}\right|\right|\le(2|u|)^n,\quad |u|\ge\frac{1}{2}.$$

Лемма доказана. ■

Докажем теперь теорему.

Теорема 3.1. Пусть $0<|z_1|\le|z_2|\le\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$ и пусть целые p_n таковы, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}<\infty$, $|z_n|=r_n$ при $\forall r>0$. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left[\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n-1}\right]$$

сходится во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и представляет целую функцию, которая имеет нули в точках $z_1, z_2, \ldots$ и только в них.

Доказательство. Возьмем $R>0$. Пусть $|z|\le R$ и $|z_n|>2R$, $n>N$. По лемме 3.1

$$\left|\ln E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)\right|\le 2\left(\frac{R}{r_n}\right)^{p_n},\quad |z|\le R,\ \ n>N,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\ln E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)$ сходится равномерно в круге $|z|\le R$. Поэтому произведение $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p_n+1\right)$ сходится равномерно в круге $|z|\le R$ к аналитической функции в $|z|<R$, которая не равна нулю. Итак, бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)$ также сходится к аналитической функции в круге $|z|<R$ и обращается в нуль только в тех точках, которые лежат в круге $|z|<R$. Так как $R>0$ — произвольное, то $F(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p_n-1\right)\in A(\mathbb{C})$. Теорема доказана.

Заметим, что в качестве p_n можно взять $p_n=n$. ■

Теорема 3.2. Пусть функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — ее нули (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность), $z_1 \neq 0$; $|z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$. Подберем целое p_n так, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$ сходился при $\forall r > 0$, $r_n = |z_n|$. Тогда справедливо представление

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right),$$

где $h(z) \in A(\mathbb{C})$, λ — кратность нуля $z = 0$ функции $f(z)$.

Доказательство. По теореме 3.1 произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right)$ есть целая функция. Обозначим ее $F(z)$. Положим $H(z) = \dfrac{f(z)}{z^{\lambda}F(z)}$, λ — кратность нуля $z = 0$. Тогда функция $H(z)$ — целая, $H(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, функция $h(z) = \ln H(z)$ также целая и тем самым

$$f(z) = z^{\lambda} F(z) H(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} F(z).$$

Теорема доказана. ■

Задачи

I. Разложить в бесконечное произведение следующие функции:
1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{sh} z$; 4) $\operatorname{ch} z$;
5) $\operatorname{ch} z - \cos z$; 6) $e^{az} - e^{bz}$, $a \neq b$.

II. Доказать, что функция $F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{e^n}\right)$ целая и что ее порядок $\rho = 0$.

III. Доказать, что функция $F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^{\sigma}}\right)$, $\sigma > 1$, целая, найти ее порядок.